STEFAN TURNAU: PROFESOR ZOFIA KRYGOWSKA JAKO MATEMATYK

Chciałbym w tym wystąpieniu podkreślić jeden z aspektów osobowości Profesor Zofii Krygowskiej: aspekt bycia matematykiem.

Większość dydaktyków matematyki po zakończeniu studiów prawdopodobnie nigdy nie angażuje się w czytanie zaawansowanych tekstów matematycznych czy – tym bardziej – rozwiązywanie problemów matematycznych o trudności znacznie przewyższającej problemy, jakie dajemy uczniom. Są i tacy, którzy w jakimś momencie swojej kariery zawodowych matematyków zdecydowali się przenieść ciężar zainteresowań i wysiłku umysłowego na problemy szkoły. Rzadko się zdarza, by dostatecznie pogłębili oni swą wiedzę o procesach nauczania i uczenia się matematyki, a ich dawna czy kontynuowana aktywność matematyczna pozostaje w całkowitej izolacji od roli dydaktyka matematyki.

Profesor Krygowska nie była żadnym z tych przypadków. Od szkoły średniej przez całe życie oddawała się pasji matematyka. Może to brzmieć dziwnie dla osób, które znały Jej ogromne intelektualne i emocjonalne zaangażowanie w problemy myślenia i uczenia się matematyki przez dzieci. Oczywiście, byłoby dla Niej raczej niemożliwe **równoległe** kultywowanie obydwu dziedzin twórczości. Było to możliwe i ogromnie wydajne dlatego, że zainteresowania matematyczne i twórczość Profesor Krygowskiej były w pełni **zintegrowane** z zainteresowaniami i twórczością w dziedzinie nauczania matematyki. Prawdziwym celem nie był dla niej nigdy wynik matematyczny jako taki; były to zawsze zagadnienia dotyczące dzieci, uczniów i szkoły. Taki cel sprawiał, że interesowały Ją przede wszystkim matematyczne problemy tak czy inaczej związane ze szkołą, zaś po każdym dokonaniu w zakresie matematyki następowała refleksja i analiza przebytej drogi.

Oto kilka przykładów.

Dysertacja doktorska Zofii Krygowskiej „O granicach ścisłości w nauczaniu geometrii elementarnej" była wynikiem, z jednej strony, głębokich studiów nad podstawami geometrii, a z drugiej – refleksją nad doświadczeniem uczennicy, a potem nauczycielki.

Zanim zaangażowała się jako autor nowej serii podręczników geometrii, stworzyła i do końca zbadała oryginalny system aksjomatów, dowodząc jego równoważności z systemem Hilberta. I oczywiście kompozycja tego systemu była umotywowana przede wszystkim celami dydaktycznymi. Działo się to w okresie tzw. pierwszej fali reform, której idee czerpano m.in. z psychologii Piageta i nowego ujęcia matematyki Nicolas Bourbaki. By w pełni zrozumieć te idee i wdrożyć je w zupełnie nowym ujęciu geometrii, podjęła trud studiowania prac Piageta i Bourbaki w francuskich oryginałach.

Zwykła była rozwiązywać trudne matematyczne problemy, notować wszystkie etapy swej pracy i analizować cały proces w celu lepszego zrozumienia myślenia uczniów, ich trudności, zagubienia, błędów itp. Gdy relacjonowała swoje doświadczenie, zawsze pokazywała wszystkie popełnione przez siebie błędy, ścieżki, które porzuciła, i inne przejawy kluczenia. Odbieraliśmy to jak pasjonującą opowieść o niezwykłej przygodzie. Pokażę tu przykład zachowanego w rękopisie i referowanego przez Profesor Krygowską na seminarium procesu rozwiązywania następującego problemu:

Ile można zbudować trójkątów różnobocznych, których długości boków są liczbami naturalnymi 1, 2, 3, ..., n?

Będę tu korzystać z oddanej niedawno do publikacji monografii Marianny Ciosek, w której rozumowanie Profesor Krygowskiej zostało dokładnie zanalizowane.

Droga do rozwiązania składa się z czterech etapów, które zaprezentuję w dużym skrócie.

Etap I to badanie szczególnego przypadku n = 10. Najpierw trzeba ustalić system wypisywania „dobrych” trójek. Wybór pada na dobieranie ich tak, by spełniały dwa warunki:

$a < b < c$

$c < a + b$

Teraz trójki są wypisywane w grupach: dla każdego a i kolejnych b dobieramy wszystkie c mniejsze od $a + b$.

3, 4, 5; 3, 5, 6; 3, 6, 7; 3, 7, 8; 3, 8, 9; 3, 9, 10;

3, 4, 6; 3, 5, 7; 3, 6, 8; 3, 7, 9; 3, 8, 10

4, 5, 6;...

itd.

Etap II. Po wypisaniu i policzeniu wszystkich „dobrych” trójek rozwiązujący przygląda się całemu zestawieniu dla dostrzeżenia jakichś jego interesujących własności. Zauważa podwójną szczególną rolę liczby 5:

– liczba wierszy rośnie wraz z a, dopóki a jest mniejsze od 5, potem maleje,
– dla ustalonego a aż do 5 liczba wierszy wynosi a–1, powyżej 5 już nie.

Szukając powodów tej regularności, rozwiązujący dochodzi do wniosku, że dla $a > 5$ **każda** trójka taka, że $a < b < c$ spełnia też warunek $c < a + b$, a co za tym idzie, liczba tych trójek wynosi $\binom{5}{3}$.

Etap III. Teraz następuje uogólnienie poczynionych obserwacji. Rozwiązujący odgaduje, że dla dowolnego n rolę 5 będzie spełniać część całkowita k liczby $n/2$, a liczba „dobrych” trójek dla a większego od k wyniesie $\binom{n-k}{3}$. Następnie stawia sobie pytanie o liczbę trójek dla a ustalonego i niewiększego od k. Szuka odpowiedzi przez wypisywanie trójek według wzorca przyjętego w badanym przykładzie n = 10 i obserwując to zestawienie dochodzi do wzoru:

$$\sum_{a=1}^{k}(a-1)(n-\frac{3}{2}a)$$

Teraz następuje sprawdzenie wzorów dla n = 10 i n = 9, po czym, w wyniku dodawania liczby trójek przed i za środkowym a, pojawiają się wzory:

dla $n = 2k$ $$\sum_{a/1}^{k}(a-1)(n-\frac{3}{2}a)+\binom{k}{3}$$

dla $n = 2k + 1$ $$\sum_{a/1}^{k}(a-1)(n-\frac{3}{2}a)+\binom{k+1}{3}$$

i komentarz *Smutne, że nie mam jednego ładnego wzoru*.

Etap IV to zakończone sukcesem próby wyeliminowania z wzorów symbolu ∑. Ostateczna postać tych wzorów to:

dla $n = 2k$ $$x=\frac{2}{3}k(k-1)(k-\frac{5}{4})$$

dla n = 2k+1 $$x=\frac{2}{3}k(k-1)(k-\frac{1}{4})$$

Marianna Ciosek uznała to postępowanie za wzorcowy model badania matematycznego, rozpoczynającego się rozważenia szczególnego przypadku po to, by poczynione na nim obserwacje uogólnić. Empiria przeplata się tu z dedukcją: rozwiązujący bada szczególny przypadek, cały czas starając się robić to w sposób dający się potem uogólnić, a próbne uogólnienie weryfikuje w szczególnych przypadkach.

Profesor Krygowska, także na podstawie podobnych własnych doświadczeń, głęboko wierzyła w to, co w systematycznym badaniu udowodniła Marianna Ciosek, że myślenie wykształconego matematyka i myślenie ucznia różnią się mniej, niż się powszechnie sądzi. Okazuje się mianowicie, że nawet problemy dostępne dla uczniów gimnazjum nie są wcale „dziecinnie łatwe" dla matematyka. Podobnie jak uczeń, matematyk często zaczyna od jednego lub kilku szczególnych przypadków. Podobnie jak uczeń, matematyk nieraz kluczy różnymi ścieżkami, zanim trafi na właściwą. Rozwiązanie matematyka wcale nie zawsze jest matematycznie eleganckie; rozwiązania uczniów bywają ładniejsze. Wreszcie sukces matematyka, tak jak ucznia, w dużej mierze zależy od emocjonalnej i intelektualnej postawy wobec problemu.

Inny aspekt matematycznego umysłu Profesor Krygowskiej ujawnił jej wykład na sympozjum zatytułowanym „Matematyka dla wszystkich", jakie w ramach Międzynarodowego Kongresu Matematycznego odbyło się w Warszawie w roku 1983. Wykład był zatytułowany „Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać istotną rolę w kształceniu matematycznym dla wszystkich". Trzeba być aktywnym i jednocześnie refleksyjnym matematykiem, by umieć wydobyć na światło to, co stanowi istotne lecz ukryte składniki aktywności matematycznej. Profesor Krygowska wymieniła je: analogia, schematyzowanie. definiowanie, dedukowanie i redukowanie, kodowanie, algorytmizowanie. Idea, że prawdziwe kształcenie matematyczne (albo – według jej sformułowania – kształcenie przez matematykę) powinno zawierać elementy rozwijające matematyczną twórczość pojawiła się niedługo przez tym wykładem. W polskich programach szkolnych tego okresu nie było nawet ich śladów; zaczęły się pojawiać w zreformowanych programach z lat 1990., ale rzadko przenikają do praktyki szkolnej.

Mocno utkwiła w mojej pamięci pełna pasji reakcja Profesor Krygowskiej na głosy, że matematyka abstrakcyjna jest zbyt trudna dla większości uczniów i że należy przejść na nauczanie bardziej konkretne, przekazywanie wiedzy quasi-empirycznej lub intuicyjnej. Zwołała wtedy: „NIE ZMIĘKCZAJCIE MATEMATYKI!". Mając pełną świadomość trudności uczniów, popierając zmianę tradycyjnego wyobrażenia o tym, co znaczy uczyć się matematyki i umieć ją, na coś bardziej sensownego dla przeciętnego ucznia – często słyszę to zawołanie „nie zmiękczajcie matematyki". Widzę teraz dwa, w pewnym sensie przeciwne, znaczenia „zmiękczania" matematyki. Jedno to powierzchowny formalizm: zredukowanie matematyki do gotowych procedur symbolicznych i sztywnych schematów rozwiązywania typowych zadań. A drugie to przesunięcie nauczania w stronę dziedziny quasi-eksperymentalnej i pseudo-intuicyjnej. Oba te kierunki mają na celu uczynić matematykę dostępniejszą dla wszystkich uczniów. I oba odciągają ten przedmiot od nauki, którą uważamy za uniwersalnie użyteczną. Profesor Zofia Krygowska, matematyk i pedagog, bez wątpienia sprzeciwiłaby się obydwu.